ردپای اتحادهای مهم جبری

بررسی کاربردهای گوناگون اتحادها و تجزیهٔ عبارت‌های جبری در سایر مباحث ریاضی

عنایت‌اله راستی‌زاده[*]
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شیراز

کلیدواژه
اتحاد، اتحاد مربع دوجمله‌ای، اتحاد جملهٔ مشترک، لگاریتم، اثبات بازگشتی، حد توابع، وارون‌پذیری

اشاره:
اتحادهای مهم جبری و تجزیهٔ عبارت‌های جبری به حاصلضرب عوامل، از جمله مباحثی است که دانش‌آموزان در شروع آموزش‌های دبیرستانی با آن روبه‌رو می‌شوند. هر چند در آنجا بر کاربردهای پرشمار این اتحادها تأکید می‌شود، اما در سال‌های بالاتر و در دیگر مباحث ریاضی است که نقش پررنگ آن‌ها خود را نمایان می‌سازد. در این مقاله می‌کوشیم با ذکر نمونه‌هایی از کاربرد اتحادها، به‌خصوص در پرسش‌های کنکورهای سراسری و امتحانات نهایی، اهمیت آموزش اتحادها و بازآموزی آن‌ها را متذکر شویم.

۱. استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای در محاسبه فاصلهٔ دو نقطه (ریاضیات ۱)

نمونه: اگر مختصات دو نقطهٔ A و B به‌صورت $A=\begin{bmatrix}۳\\ -k\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}k-۱\\ ۲\end{bmatrix}$ باشد، مقدار k را چنان بیابید که طول AB برابر $\sqrt{۲۶}$ شود.

حل:

$$AB=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(k-۴)^۲+(۲+k)^۲}=\sqrt{۲۶}$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم و با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$k^۲-۸k+۱۶+۴+۴k+k^۲=۲۶$$

$$\Rightarrow ۲k^۲-۴k-۶=۰\Rightarrow k^۲-۲k-۳=۰$$

$$\Rightarrow (k+۱)(k-۳)=۰ \quad \text{(تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک)}$$

$$\Rightarrow (k+۱)=۰ \ \text{یا}\ (k-۳)=۰ \ \Rightarrow k=-۱ \ \text{یا}\ k=۳$$

که هر دو مقدار برای k قابل قبول است.

۲. استفاده از اتحاد مزدوج در تساوی زوج‌های مرتب (ریاضیات ۲)

نمونه: x و y را چنان بیابید که دو زوج مرتب $(۳۶, x-۳y)$ و $(۵, ۱+x^۲-۹y^۲)$ با هم برابر باشند.

حل: هرگاه $(a,b)=(c,d)$، آن‌گاه: $a=c, b=d$. لذا:

$$x-۳y=۵, ۱+x^۲-۹y^۲=۳۶$$

در نتیجه داریم: $x^۲-۹y^۲=۳۵$ و به یاری اتحاد مزدوج خواهیم داشت:

$$\underbrace{(x-۳y)}_{۵}(x+۳y)=۳۵\Rightarrow x+۳y=۷$$

از حل دستگاه $\begin{cases}x+۳y=۷\\ x-۳y=۵\end{cases}$ نتیجه می‌شود: $x=۶$ و $y=\frac{۱}{۳}$.

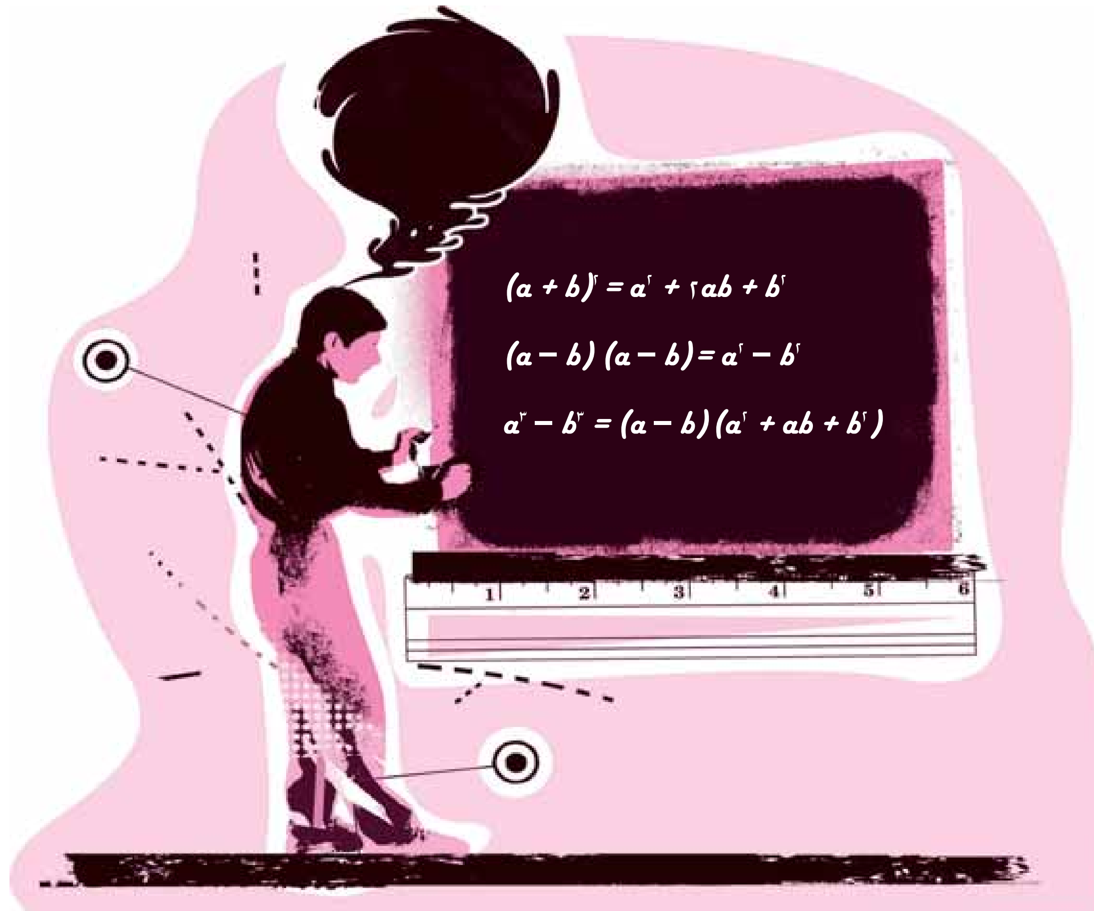
۳. استفاده از اتحاد جملهٔ مشترک در شرط تابع‌بودن و حل معادلهٔ درجهٔ دوم (ریاضیات ۲)

نمونه: برای چه مقدار a رابطهٔ f یک تابع است؟

$$f=\{(۱,۳),(۲,۵),(۱,a^۲+۲a),(a+۱,۶)\}$$

حل: با توجه به مفهوم تابع لازم است: $a^۲+۲a=۳$. در این صورت: $a^۲+۲a-۳=۰$ و با تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک داریم: $(a+۳)(a-۱)=۰$. لذا $a=۱$ یا $a=-۳$ که فقط $a=-۳$ قابل قبول است (زیرا با فرض «$a=۱$، $a+۱=۲$»، در نتیجه دو زوج مرتب متمایز، با مؤلفهٔ نخست ۲، خواهیم داشت). در این صورت:

$$f=\{(۱,۳),(۲,۵),(-۲,۶)\}$$



۴. استفاده از اتحاد مربع مجموع دو جمله و مکعب مجموع دو جمله در لگاریتم (ریاضیات ۲)

نمونهٔ۱. حاصل $\log_{(۱+\sqrt{۲})}^{(۳+۲\sqrt{۲})^۳}$ چه‌قدر است؟

حل: با توجه به اتحاد مربع مجموع دو جمله داریم:

$$(۱+\sqrt{۲})^۲ = ۱+۲\sqrt{۲}+۲ = ۳+۲\sqrt{۲}$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$\log_{(۱+\sqrt{۲})}^{((۱+\sqrt{۲})^۲)^۳} = \log_{(۱+\sqrt{۲})}^{(۱+\sqrt{۲})^۶} = ۶$$

نمونهٔ۲. معادلهٔ لگاریتمی

$$\log_۲^{(x+۳)} + \log_۲^{(x-۱)} + \log_۲^{x} = \log_۲^{(x^۳-۳x^۲+۳x-۱)}$$

را حل کنید. آیا این معادله ریشهٔ حقیقی دارد؟

حل: در اینجا از اتحاد مکعب مجموع دو جمله استفاده می‌کنیم و داریم: (مفهوم تجزیه)

$$x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ = (x-۱)^۳$$

و با توجه به خواص لگاریتم می‌نویسیم:

$$\log_۲^{(x+۳)(x-۱)(x)} = \log_۲^{(x-۱)^۳} \xrightarrow{x-۱\neq ۰} x(x+۳) = (x-۱)^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۳x = x^۲ - ۲x + ۱ \Rightarrow ۵x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۵}$$

که غیرقابل قبول است (زیرا به ازای $x = \frac{۱}{۵}$، $x - ۱ < ۰$ و $\log(x-۱)$ تعریف نشده است). بنابراین معادلهٔ فوق ریشهٔ حقیقی ندارد.

۵. استفاده از اتحادها در اثبات بازگشتی (درس جبر و احتمال)

نمونهٔ۱. اگر a، b و c سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۳ \geq ۲(a+b+c)$$

(امتحان نهایی ـ خرداد ۹۱)

اثبات: فرض کنیم نامساوی فوق برقرار باشد. داریم:

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۱ + ۱ + ۱ \geq ۲a + ۲b + ۲c$$

$$\Rightarrow (a^۲ - ۲a + ۱) + (b^۲ - ۲b + ۱) + (c^۲ - ۲c + ۱) \geq ۰$$

با توجه به اتحاد مربع مجموع دو جمله خواهیم داشت:

$$(a-۱)^۲ + (b-۱)^۲ + (c-۱)^۲ \geq ۰$$

نامساوی اخیر به‌وضوح برقرار است و همهٔ روابط بازگشت‌پذیرند؛ لذا حکم اولیه برقرار است.

نمونهٔ۲. ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و داشته باشیم: $a + b > ۰$، آن‌گاه رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{a^۳ + b^۳}{a+b} \geq ab$$

(سؤال امتحان نهایی ـ خرداد ۱۳۹۰)

پاسخ: فرض کنیم رابطهٔ اخیر برقرار باشد. با تجزیهٔ صورت کسر خواهیم داشت:

$$\frac{(a+b)(a^۲ - ab + b^۲)}{a+b} \geq ab$$

در نتیجه: $a^۲ - ab + b^۲ \geq ab$ و بنابراین: $a^۲ - ۲ab + b^۲ \geq ۰$ که معادل است با: (اتحاد مربع

$(a-b)^2 \ge 0$. رابطهٔ اخیر همواره برقرار است و همهٔ روابط بازگشت‌پذیرند. پس حکم برقرار است. (شرط $a+b>0$، در این مسئله، اضافی است و تنها کافی است که داشته باشیم: $a+b \ne 0$).

بعضی از دانش‌آموزان سوم دبیرستان به دلیل ضعف در اتحاد و تجزیه، نتوانستند پاسخ کاملی به این سؤال بدهند.

۶. استفاده از اتحادها در محاسبهٔ حد توابع (ریاضیات سوم دبیرستان)

نمونه: حاصل حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^2+x-6}{9x^2+3x-12}$$

حل: در اینجا وقتی x به سمت یک میل می‌کند، صورت و مخرج کسر هر دو به صفر نزدیک می‌شوند. در اینجا لازم است صورت و مخرج کسر تجزیه شوند که به این منظور از اتحاد جملهٔ مشترک کمک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(5x+6)}{(3x-3)(3x+4)}=\lim_{x\to 1}\frac{5x+6}{3(3x+4)}=\frac{11}{21}$$

برای تجزیهٔ صورت به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$A=5x^2+x-6 \Rightarrow 5A=25x^2+5x-30$$

$$\Rightarrow 5A=(5x-5)(5x+6) \Rightarrow A=(x-1)(5x+6)$$

دو نمونه تست از کنکور آزاد سال ۱۳۸۸
رشتهٔ پزشکی نوبت صبح و عصر

نمونه۱: حد کسر $\frac{1+\cos x}{1+\cos^3 x}$ وقتی $x \to \pi$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{-1}{3}$

حل: با استفاده از اتحاد جبری $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ مخرج کسر بالا را تجزیه می‌کنیم و داریم:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{1+\cos^3 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{1-\cos x+\cos^2 x}=\frac{1}{3}$$

نمونه۲: حد کسر $\frac{x^2-1+\sqrt{(x-1)^3}}{x^3-1+2\sqrt{(x-1)^3}}$ وقتی $x \to 1^+$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) صفر

حل: از اتحاد مزدوج برای صورت و از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ برای تجزیهٔ مخرج کمک می‌گیریم و رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)+\sqrt{(x-1)^3}}{(x-1)(x^2+x+1)+2\sqrt{(x-1)^3}}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1+\sqrt{x-1}}{x^2+x+1+2\sqrt{x-1}}=\frac{2}{3}$$

۷. استفاده از اتحادها در یافتن مشتق توابع به کمک تعریف مشتق (ریاضی ۳ ـ حسابان)

نمونه: مشتق تابع $f(x)=x^3-x$ در نقطهٔ $x=2$ را از طریق تعریف مشتق بیابید.

حل:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x-6}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+3)=11$$

در اینجا نیز آگاهی از شیوهٔ تجزیهٔ سه جمله‌ای x^3-x-6 در محاسبهٔ مشتق نقش بسزایی در حل مسئله دارد. در مثال بعدی نیز استفاده از اتحاد جملهٔ مشترک در یافتن راه‌حل نقش دارد که یافتن پاسخ آن را به‌عهدهٔ دانش‌آموزان می‌گذاریم.

تمرین: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=x^2+3x$ را در نقطهٔ $x=1$ بیابید. (خرداد ۸۵ ـ امتحان نهایی سوم تجربی)

۸. استفاده از اتحادها در مباحث مثلثاتی (اتحادها ـ انتگرال، معادلات و...)

نمونه: نشان دهید:

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$$

حل: به کمک اتحاد مربع مجموع دو جمله به‌سادگی ثابت می‌شود (حل آن را به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم).

نمونه: حاصل انتگرال زیر را به‌دست آورید:

$$\int\frac{1+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

حل: با توجه به اینکه:

$(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$، خواهیم داشت:

$$\int\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}dx=\int(\sin x+\cos x)dx$$

$$=-\cos x+\sin x+C$$

نمونه: معادلهٔ $\tan x+\cot x=2$ در بازه $[0,2\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

■**حل:** با توجه به اینکه $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ داریم:

$\tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0$

و به کمک تجزیه (اتحاد مربع دو جمله): $(\tan x - 1)^2 = 0$

بنابراین: $\tan x = 1$ و در بازه داده شده دو ریشه دارد که $x=\frac{\pi}{4}$ و $x=\frac{5\pi}{4}$ هستند.

تمرین: اگر $\sin x + \cos x = k$ باشد، حاصل $\sin x \cos x$ و $\sin^3 x + \cos^3 x$ را برحسب k بیابید.

۹. استفاده از اتحادها در تعیین ماکزیمم و مینی‌مم بعضی توابع (یافتن بُرد تابع)

نمونه: حداقل و حداکثر مقدار تابع با ضابطهٔ $y = f(x) = \sqrt{-x^2+x+1}$ را به‌دست آورید.

■**حل:**

$$y=\sqrt{-x^2+x+1}=\sqrt{-x^2+x-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}}$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}} \Rightarrow 0 \le y \le \frac{\sqrt{5}}{2}$$

در مثال فوق نیز نقش تجزیهٔ سه جمله‌ای در یافتن راه‌حل به‌خوبی قابل مشاهده است.

۱۰. در تشخیص وارون‌پذیری تابع و یافتن ضابطهٔ تابع وارون

نمونه: تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3+3x^2+3x$ داده شده است. ثابت کنید f یک‌به‌یک است. سپس وارون آن را بیابید.

■**حل:** با افزودن ۱ به دو طرف تساوی $f(x_1)=f(x_2)$ و با استفاده از اتحاد $(a+b)^3$ به‌راحتی مسئله حل می‌شود. بیان جزئیات پاسخ را به‌عهدهٔ دانش‌آموزان می‌گذاریم.

۱۱. استفاده از اتحادها در دنباله‌های حسابی و هندسی

نمونه: سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی عبارت‌اند از: $x-1$، $x+1$، $x+2$. مقدار x را پیدا کنید.

■**حل:** اگر a، b و c جملات متوالی دنبالهٔ هندسی هستند، در این صورت: $b^2=ac$. پس:

$(x+1)^2=(x+2)(x-1)$

به کمک دو اتحاد جملهٔ مشترک و مربع مجموع دو جمله داریم:

$x^2+2x+1=x^2+x-2$

و در نتیجه $x=-3$.

تمرین: یک دنبالهٔ حسابی صعودی را بیابید که مجموع سه جملهٔ اول آن ۲۷ و مجموع مربعات همان جملات ۲۷۵ باشد.

۱۲. کاربرد اتحادها در هم‌نهشتی (ریاضیات گسسته)

به‌عنوان نمونه به کمک هم‌نهشتی و به‌سادگی می‌توان نشان داد که: $(a \pm b)^2 \equiv a^2+b^2$ (پیمانه ab).

یا: $(a \pm b)^3 \equiv a^3+b^3$ (پیمانه ab)

که باز هم ردپای اتحادها به‌خوبی قابل مشاهده است!

۱۳. در تعیین نوع مقطع مخروطی (هندسه تحلیلی)

نمونه: نوع مقطع مخروطی $9x^2-4y^2-36x-24y-36=0$ را تعیین کنید.

■**حل:** با دسته‌بندی و تجزیه براساس اتحاد مربع دو جمله خواهیم داشت:

$$9(x^2-4x+4)-4(y^2+6y+9)=36$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{9}=1$$

که یک هذلولی به مرکز $(2,-3)$ است.

۱۴. در مسائل مسابقات و المپیادها

نمونه: نشان دهید که برای هر n، تعداد نامتناهی عدد a وجود دارد؛ به‌طوری که عدد n^4+a اول نیست. (یازدهمین «المپیاد بین‌المللی ریاضی (IMO)»، ۱۹۶۹. منبع: رقابت‌های المپیادهای ریاضی، نویسنده: آندرسکیو، مترجم: دکتر عراقی.)

■**پاسخ:** اگر داشته باشیم $a=4k^4$، آن‌گاه:

$$n^4+4k^4=(n^2+2nk+2k^2)(n^2-2nk+2k^2)$$

چون $n^2+2nk+2k^2>k>1$ و $n^2-2nk+2k^2=(n-k)^2+k^2>k^2>1$، هیچ‌یک از اعداد به‌صورت n^4+4k^4 اول نیستند.

■سخن پایانی

کاربرد اتحادها و تجزیهٔ عبارات جبری به نمونه‌های بالا محدود نمی‌شود، بلکه می‌توان مثال‌های بیشتری از ردپای اتحادها در جای‌جای ریاضیات دبیرستانی یافت. آنچه لازم است در پایان متذکر شد و بر آن تأکید ورزید این است که معلمان گرامی در آغاز هر سال تحصیلی به بازآموزی فشرده و کوتاهی از اتحادها به دانش‌آموزان مبادرت ورزند.

* erastizadeh@yahoo.com